

НЕИЗВЕСТНОЕ ПИСЬМО П. Л. ЧЕБЫШЕВА¹ С. В. КОВАЛЕВСКОЙ²

П. Я. КОЧИНА (Москва) и Р.-Л. КУК (США)

Опубликованную переписку П. Л. Чебышева нельзя назвать обширной [1]. Его писем найдено мало. Поэтому каждое новое письмо представляет большую ценность. Кажется, наибольшее число писем было им послано С. В. Ковалевской. Пять из них находятся в архиве Г. Миттаг-Леффлера³, в группе писем от русских математиков. По фотокопиям, предоставленным Институтом Миттаг-Леффлера Академии наук СССР, они были опубликованы в разных местах и собраны в Собрании сочинений П. Л. Чебышева (т. 5 и 2). Недавно профессор Роджер Кук обнаружил среди лекций С. В. Ковалевской в Институте Миттаг-Леффлера еще одно письмо, помещаемое здесь.

Письмо представляет специальный интерес еще потому, что существует версия: Чебышев не любил эллиптические функции. В задачах о приведении эллиптических интегралов Чебышев стоял на «алгебраической» точки зрения, а Вейерштрасс — на «трансцендентной». Впрочем, ученик Чебышева Е. И. Золотарев⁴ применил теорию эллиптических функций для доказательства одной теоремы Чебышева [1, т. 2, с. 489]. В действительности мы имеем, по-видимому, лишь одну опубликованную статью Чебышева с применением эллиптических функций — это появившаяся в самом конце его жизни, в 1894 г., работа [2]. Ковалевской же он сообщил о ней, как видно из прилагаемого письма, еще в 1889 г.

В более ранней статье [3] 1859 г. Чебышев ставит вопрос о приближенном представлении $\sqrt{\frac{1}{x}}$ (или $\sqrt{\frac{1}{V}}$) в виде суммы рациональных дробей. Отсюда в статье 1894 г. он получает выражение интеграла от $U/\sqrt{V}$ в виде суммы интегралов от рациональных функций U и V , причем коэффициенты оказываются эллиптическими функциями. В статье 1894 г., приведенной также в Собрании его сочинений [т. 3, с. 240—255], Чебышев по сравнению с прилагаемым письмом более подробно рассматривает примеры.

В письме Чебышева есть загадочное место: он указывает математический журнал, добавляя: «куда впервые я был введен Вами» — это *Bulletin de la Société Mathématique de France*, где была напечатана его статья «Об алгебраических дробях...» [4]. Но в этом журнале еще в 1875 г. опубликована заметка Чебышева [5]. Так когда же Ковалевская могла ввести Чебышева в журнал?

Отметим, что перевод статьи П. Л. Чебышева 1894 г. был сделан на немецкий язык О. Баклундом⁵.

Письмо П. Л. Чебышева

Многоуважаемая Софья Васильевна!

Я еще не успел принести Вам чувствительнейшей благодарности за содействие к напечатанию перевода [6], сделанного Лионом⁶, как снова обращаюсь к Вам с прось-

¹ Чебышев Пафнутий Львович (1821—1894).

² Ковалевская Софья Васильевна (1850—1891).

³ Миттаг-Леффлер Гёста (1846—1927).

⁴ Золотарев Егор Иванович (1847—1878).

⁵ Баклунд Оскар Андреевич (1846—1916) — астроном.

⁶ Лион Жозеф (Lyон J.) (1858—1907) — ученик П. Л. Чебышева и Г. Дарбу.

Если в интеграле

$$\int \frac{U}{V\sqrt{V}} du$$

функции U , V при всех величинах переменной u , на которые он распространяется, остаются положительными и V остается между M и $M_0 < M$, при помощи эллиптической функции с модулем

$$k = \sqrt{\frac{M - M_0}{M}}$$

получается такая формула для приближенного определения этого интеграла:

$$\Sigma \int \frac{V\sqrt{M} \, dn \frac{2iK}{2n+1} \cdot U}{Vsn^2 \frac{2iK}{2n+1} + Mcn^2 \frac{2iK}{2n+1}} du$$

$$\frac{\Sigma dn \frac{2iK}{2n+1}}{\frac{2iK}{2n+1}},$$

где n — какое-нибудь целое число

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{V 1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

суммирования же распро[стра]няются на

$$i = -n, -(n-1), \dots, 1, 0, -1, \dots, n-1, n.$$

С возрастанием числа n быстро увеличивается степень точности этой формулы; так как она при различных числах n дает величину интеграла

$$\int \frac{U}{V\sqrt{V}} du,$$

умноженную на некоторые количества, не выходящие за пределы 1, μ , где μ определяется уравнением

$$\mu^2 = 1 - 16q^{2n+1} \left(\frac{1 + q^{4n+2} + q^{12n+6} + q^{24n+12} + \dots}{1 + q^{2n+1} + q^{6n+3} + q^{12n+6} + \dots} \right)^8,$$

в котором

$$q = e^{-\frac{\pi}{K} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{V 1 - (1-k^2) \sin^2 \varphi}}.$$

В частном случае

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

получается

$$q = e^{-\pi},$$

вследствие чего при $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ уравнение, определяющее μ , приводится к такому:

$$\mu^2 = 1 - 16e^{-(2n+1)\pi} \left(\frac{1 + e^{-(4n+2)\pi} + e^{-(12n+6)\pi} + e^{-(24n+12)\pi} + \dots}{1 + e^{-(2n+1)\pi} + e^{-(6n+3)\pi} + e^{-(12n+6)\pi} + \dots} \right)^8,$$

что при $n=1, 2, \dots$, дает

$$\mu = 0,9993922,$$

$$\mu = 0,9999998,$$

откуда видно, как быстро приближается к единице величина μ при возрастании числа n .

Делая же

$$U=1, \quad V=1-\lambda^2 \sin^2 u$$

и замечая, что при этом $M=1$ и интеграл

$$\int_0^u \frac{M \operatorname{dn} \frac{2iK}{2n+1} \cdot U}{\sqrt{\operatorname{sn}^2 \frac{2iK}{2n+1} + M \operatorname{cn}^2 \frac{2iK}{2n+1}}} du$$

равняется

$$\frac{\operatorname{dn} \frac{2iK}{2n+1}}{\sqrt{1-\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{2iK}{2n+1}}} \operatorname{arc tang} \left(\sqrt{1-\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{2iK}{2n+1}} \cdot \operatorname{tang} u \right),$$

находим для интеграла

$$\int_0^u \frac{U}{V \sqrt{V}} du = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}},$$

с точностью, определяемую близостью количества μ к единице, такое приближенное выражение:

$$\Sigma \frac{\operatorname{dn} \frac{2iK}{2n+1} \operatorname{arc tang} \left(\sqrt{1-\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{2iK}{2n+1}} \operatorname{tang} u \right)}{\sqrt{1-\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{2iK}{2n+1}}},$$

$$\frac{\Sigma \operatorname{dn} \frac{2iK}{2n+1}}{\Sigma \operatorname{dn} \frac{2iK}{2n+1}},$$

что при $n=1, n=2$ приводится к следующему:

$$A_0 u + \frac{B_0}{R_0} \operatorname{arc tang} (R_0 \operatorname{tang} u),$$

$$A_1 u + \frac{B_1}{R_1} \operatorname{arc tang} (R_1 \operatorname{tang} u) + \frac{B_2}{R_2} \operatorname{arc tang} (R_2 \operatorname{tang} u),$$

где

$$A_0 = 0,3933195; \quad B_0 = 0,6066805;$$

$$R_0 = \sqrt{1-0,8104009\lambda^2},$$

$$A_1 = 0,2360679; \quad B_1 = 0,4188060; \quad B_2 = 0,3451258,$$

$$R_1 = \sqrt{1-0,4262987\lambda^2}; \quad R_2 = \sqrt{1-0,9313130\lambda^2}.$$

Эти формулы получены в предположении

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

что по равенствам

$$k = \sqrt{\frac{M-M_0}{M}}, \quad M=1$$

имеет место при

$$M_0 = \frac{1}{2},$$

а потому в пределах интегрирования функция

$$V=1-\lambda^2 \sin^2 u$$

не должна принимать значений меньше $M_0 = 1/2$ и, следовательно, должно быть

$$\sin u \leq \frac{1}{2\lambda}.$$

Подобные формулы мы находим для вычисления интеграла

$$\int_0^u \frac{1 + p \sin^2 u}{1 + q \sin^2 u} \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}},$$

полагая

$$U = \frac{1 + p \sin^2 u}{1 + q \sin^2 u}, V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u.$$

В заключение прошу передать мое почтение Миттагу-Леффлеру и принять уверение в глубочайшем уважении, с которым пребыть честь [имею]

6-го [сентября] 1889.

П. Чебышев

Литература

1. Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. М.—Л., 1947, т. 2. 520 с.; 1948, т. 3. 414 с.; 1951, т. 5. 474 с.
2. Tchebycheff P. Angenäherte Darstellung der Quadratwurzel einer Veränderlichen mittels einfacher Brüche.—Acta mathematica, 1894, B. XVIII, S. 113—132. (В собр. соч.—т. 3, с. 240—255).
3. Чебышев П. Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функции.—Собр. соч., т. 2, с. 151—235. (Впервые опубликовано в 1859 г.)
4. Чебышев П. Л. Об алгебраических дробях, которые в данных пределах представляют приблизительно квадратный корень из переменных.—Собр. соч., т. 3, с. 170—171. (Впервые опубликовано в Bull. Soc. Mathém. France, 1884, t. XII, p. 167—168.)
5. Чебышев П. Л. О пределе степени целой функции, которая удовлетворяет известным условиям.—Собр. соч., т. 3, с. 88 (Впервые опубликовано в Bull. Soc. Mathém. France, 1875, t. III, p. 103.)
6. Tchebycheff P. Sur les résidus intégraux qui donnent les valeurs approchées des intégrales.—Acta mathematica, 1889, t. 12, p. 287—322.
7. Tchebycheff P. Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités.—Acta mathematica, 1890—1891, t. 14, p. 305—316.

Календарь юбилейных дат

275 лет

Со дня рождения Альбрехта Галлера (16.X.1708 — 12.XII.1777), выдающегося швейцарского натуралиста, медика и поэта, почетного члена многих Академий и научных обществ.



На всех дошедших до нас портретах А. Галлер изображен за письменным столом с книгой или пером в руках, что естественно при огромном литературном наследстве, оставленном им: опубликовано 740 книг и статей по анатомии, ботанике, геологии, медицине, физиологии, эмбриологии, истории науки и так далее, он автор 10 000 рецензий (из них 1000 на ненаучные произведения); известно 13 000 его писем 1080 корреспондентам из многих стран Европы.

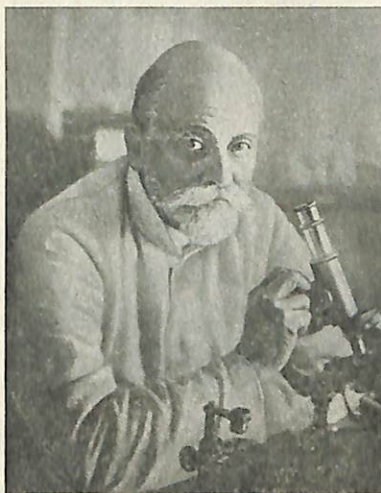
Создатель учения о раздражительности и чувствительности, оказавшего большое влияние на ряд философов-материалистов (Дидро, Ламетри и др.), автор систематики, отличной от линнеевской, основоположник антропологии, известный поэт (говорят о его влиянии на Шиллера и Клопштока), организатор крупной интернациональной научной школы в Геттингенском университете, Альбрехт Галлер оставил яркий след в духовной культуре XVIII в. Лит.: Меркулов В. Л. Альбрехт Галлер. 1708—1777. Л.: Наука, 1981.

175 лет

Со дня рождения Иоганна Бенедикта Листинга (25.VII.1808 — 24.XII. 1882), немецкого математика и физика. Листинг наиболее известен своими работами по топологии («топология» — его термин). Занимаясь геодезией, он ввел термин и понятие «геонд», являющееся основным в теории и методах изучения формы, размеров и строения Земли.

125 лет

Со дня рождения Владимира Михайловича Шимкевича (9.VIII.1858 — 23.II.1923) — выдающегося русского зо-



олога-дарвиниста, академика, ректора Петербургского университета (1921—1922 гг.). Основные труды В. М. Шимкевича относятся к морфологии, эмбриологии и систематике. Исследования по систематике морских пауков он завершил фундаментальным двухтомным трудом «Многоклеточные (Pantopoda)». Убедительный дарвинист, Шимкевич разрабатывал общие вопросы эволюции, выдвинул теорию происхождения хордовых, исследовал вопрос о происхождении червей. Он автор известных учебных курсов: «Биологические основы зоологии», «Курс сравнительной анатомии позвоночных животных» (использовался в Германии как университетский учебник).